Ejemplo de suma de todos los términos de una progresión geométrica

Estudiamos el problema de calcular la suma de todos los términos de la progresión geométrica «a» de primer término $a_1 = 2$ y razón $R = –0,25$.

Para hacernos una idea de lo que ocurre, vamos a ir calculando distintos valores de los términos, de la razón elevada a una potencia y de la suma de los primeros términos.

Usaremos las fórmulas $a_n = a_1 \cdot R^{n-1}$ y $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (R^n - 1)}{R-1}$.

Para presentar los resultados de la manera más clara para la explicación, redondeamos casi todos. Observa con atención lo que va sucediendo:

n	a_n	R^n	S_n
1	2	–0,25	2
2	–0,5	0,0625	1,5
3	0,125	–0,015625	1,625
4	–0,03125	0,003906	1,59375
5	0,007813	–0,0009766	1,601563
6	–0,001953	0,000244	1,599609

n	a_n	R^n	S_n
7	0,000488	–0,000061	1,600098
8	–0,000122	0,000015	1,599976
16	$-1{,}9 \cdot 10^{-9}$	$2{,}3 \cdot 10^{-10}$	1,5999999996
17	$4{,}7 \cdot 10^{-10}$	$-5{,}8 \cdot 10^{-11}$	1,6000000001
164	$-1{,}4 \cdot 10^{-98}$	$1{,}8 \cdot 10^{-99}$	1,6 (¿seguro?)
165	$3{,}6 \cdot 10^{-99}$	0 (¿seguro?)	1,6 (¿seguro?)

Conforme la «n» va tomando valores cada vez mayores:

✱ Los valores de «a_n» van siendo más próximos a 0.

✱ Los valores de «R^n» van siendo más próximos a 0.

✱ Los valores de «S_n» van siendo más próximos a 1,6.

Para n=164 vemos que el resultado de S_n es tan cercano a 1,6 que una calculadora científica escolar no puede calcular la diferencia y ofrece como resultado «1,6».

Para n=165 vemos que el valor de «R^n» es tan próximo a 0 que su valor excede la capacidad de esa calculadora, que ofrece como resultado «0».

Está claro que para valores de «n» mayores de 165, el valor de «R^n» es tan sumamente próximo a 0 que para cualquier aplicación práctica se puede considerar que es 0.

Ahora viene el punto más importante de todo este desarrollo: si llamamos S a la suma de todos los términos de la progresión geométrica, podemos asegurar que su valor se obtiene haciendo «0» el valor de «R^n» en la fórmula de S_n:

$$S = \frac{a_1 \cdot (R^n - 1)}{R-1} = \frac{a_1 \cdot (0-1)}{R-1} = \frac{a_1 \cdot (-1)}{R-1} = \frac{-a_1}{R-1} = \frac{-2}{-0{,}25-1} = \frac{-2}{-1{,}25} = 1{,}6$$

Hemos obtenido como valor **exacto** de la suma de todos los términos de la progresión geométrica «a» el número 1,6.

Generalización

Hemos visto que lo más importante para poder calcular la suma de todos los términos de la progresión geométrica ha sido que R^n tome valores tan próximos a 0 como se desee. Se sabe que esto solo ocurre para valores de R que estén entre –1 y 1. Es decir, debe ocurrir que $-1 < R < 1$, condición que también se escribe así:

$$\boxed{|R| < 1}$$