Suma de los primeros términos de una progresión geométrica

Si «a» es una progresión geométrica y «n» es un número natural, llamamos S_n a la suma de los «n» primeros términos; es decir: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Ejemplo 1

Enunciado: dada la progresión geométrica «b» de primer término $b_1=7$ y razón 11, calcula la suma de los cinco primeros términos.

Resolución

Los primeros cinco términos son b → 7, 77, 847, 9317, 102 487.

La suma es S_5 = 7 + 77 + 847 + 9317 + 102 487 = 112 735. Solución: 112 735.

Expresión de la suma

Si la razón R es distinta de 1 (R≠1), se verifica:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (R^n - 1)}{R-1}}$$

Demostración

Por definición, $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

Multiplicamos la expresión por R: $S_n \cdot R = a_1 \cdot R + a_2 \cdot R + ... + a_n \cdot R = a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}$

Restamos la expresión que acabamos de obtener y la expresión de la suma:

$S_n \cdot R - S_n = (a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + ... + a_n)$

En el primer miembro extraemos factor común y en el segundo simplificamos:

$S_n \cdot (R - 1) = a_{n+1} - a_1$

Como R≠1, R–1≠0, R–1 tiene inverso, luego podemos despejar S_n: $S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{R-1}$

Usamos la expresión del término a_{n+1} para llegar al resultado final:

$$S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{R-1} = \frac{a_1 \cdot R^{n+1-1} - a_1}{R-1} = \frac{a_1 \cdot R^n - a_1}{R-1} = \frac{a_1 \cdot (R^n - 1)}{R-1}$$

Ejemplo 2

Enunciado: dada la progresión geométrica «b» de primer término $b_1=7$ y razón 11, calcula la suma de los cinco primeros términos.

Resolución

$S_5 = \frac{b_1 \cdot (R^5 - 1)}{R-1} = \frac{7 \cdot (11^5 - 1)}{11-1}$ = 112 735. Solución: 112 735

Calculadora: 7 × (1 1 y^x 5 – 1) ÷ (1 1 – 1) =

Ejemplo 3

Enunciado: dada la progresión geométrica «c» de primer término $c_1=4{,}23$ y razón 0,93, calcula la suma de los primeros 47 términos. Da el resultado con seis cifras significativas.

Resolución

$S_{47} = \frac{c_1 \cdot (R^{47} - 1)}{R-1} = \frac{4{,}23 \cdot (0{,}93^{47} - 1)}{0{,}93-1}$ = 58,43358057. Solución: 58,4336

Calculadora: 4 . 2 3 × (0 . 9 3 y^x 4 7 – 1) ÷ (0 . 9 3 – 1) =