

Propiedad de las progresiones aritméticas

Si «a» es una progresión aritmética y «n» es un número natural mayor o igual a 3, se verifica

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$$

Ejemplo 1

Consideramos la progresión aritmética $b \rightarrow 15, 21, 27, 33, 39, \dots$ y el número $n = 5$. La propiedad afirma que $b_1 + b_5 = b_2 + b_4$, cosa que es cierta porque $b_1 + b_5 = 15 + 39 = 54$ y $b_2 + b_4 = 21 + 33 = 54$.

Demostración

Llamamos «d» a la diferencia de la progresión aritmética «a».

Sabemos que $a_2 = a_1 + d$ y que $a_{n-1} = a_n - d$. Por tanto:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$

Consecuencia de la propiedad

Una vez demostrada la propiedad, sería fácil demostrar que hay muchas otras sumas que dan el mismo resultado:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = a_5 + a_{n-4} = \dots$$

Ejemplo 2

Consideramos la progresión aritmética $c \rightarrow 3, 16, 29, 42, 55, 68, 81, \dots$ y $n = 7$.

$$c_1 + c_7 = 3 + 81 = 84; c_2 + c_6 = 16 + 68 = 84; c_3 + c_5 = 29 + 55 = 84; c_4 + c_4 = 2 \cdot 42 = 84$$

Enunciados

- ③ En la progresión aritmética «e» se sabe que $e_1 = -31$ y $e_{53} = 77$. Calcula e_{27} .
- ④ En la progresión aritmética «f» se sabe que $f_1 = 71$ y la diferencia es -7 . Calcula el valor de « $f_2 + f_{74}$ ».
- ⑤ Calcula la suma de los tres primeros términos de la progresión aritmética «g» sabiendo que $g_2 = 79$.

Resoluciones

- ③ El término 27 de la sucesión es el término que queda en el centro entre el 1 y el 53, ya que $\frac{1+53}{2} = 27$.

Aplicando la propiedad sabemos que $e_1 + e_{53} = e_{27} + e_{27} = 2 \cdot e_{27}$, por tanto:

$$e_{27} = \frac{e_1 + e_{53}}{2} = \frac{-31 + 77}{2} = 23. \text{ Solución: } 23.$$

- ④ $f_{75} = f_1 + (75-1)d = 71 + 74 \cdot (-7) = -447$.
 $f_2 + f_{74} = f_1 + f_{75} = 71 + (-447) = -376$. Solución: -376 .

- ⑤ Las demostraciones en matemáticas muchas veces son importantes porque nos muestran técnicas que se pueden adaptar a otros problemas. En este caso podemos usar una técnica similar a la demostración de la propiedad:
 $g_1 + g_2 + g_3 = (g_2 - d) + g_2 + (g_2 + d) = 3 \cdot g_2 = 3 \cdot 79 = 237$. Solución: 237.