Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios en polinomios irreducibles:

① $25x^6-70x^5+49x^4$

② $x^4-5x^3-9x^2+81x-108$

Resoluciones

① Para facilitar la explicación, vamos a ir poniendo nombres a los polinomios:

$P(x) = 25x^6-70x^5+49x^4$

El único metodo que podemos aplicar para factorizar P(x) es extraer factor común la «x», aunque lo podemos hacer cuatro veces, así que extraemos factor común x^4: $P(x) = (25x^2-70x+49)\cdot x^4$. Llamamos $Q(x) = 25x^2-70x+49$.

Para factorizar Q(x) no podemos utilizar el método de la división exacta porque ninguno de los divisores del término independiente es raíz de Q(x) (de todos modos, serían operaciones muy incómodas). Se puede utilizar el método de factorización de un polinomio de segundo grado, pero es mucho más rápido darse cuenta de que se puede usar un producto notable: $25x^2-70x+49 = (5x-7)^2$

Solución: $25x^6-70x^5+49x^4 = x^4\cdot(5x-7)^2$

② Para facilitar la explicación, vamos a ir poniendo nombres a los polinomios:

$R(x) = x^4-5x^3-9x^2+81x-108$

Para factorizar R(x) solo podemos utilizar el método de la división exacta. El término independiente tiene muchos divisisores; no hace falta que los escribas, basta con que vayas probando hasta encontrar una raíz de R(x). Empezamos por determinar que ni 1, ni –1, ni 2 ni –2 son raíces de R(x); es importante recordar este dato, porque esos números ya no los volveremos a probar. El 3:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -5 & -9 & 81 & -108 \\ 3 & & 3 & -6 & -45 & 108 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 36 & 0 \end{array}$$

Tenemos que $R(x) = (x^3-2x^2-15x+36)\cdot(x-3)$; llamamos $S(x) = x^3-2x^2-15x+36$.

El siguiente paso es muy importante: hay probar si 3 también es raíz del polinomio S(x); lo ha sido de R(x), así que lo puede ser también de S(x). Lo vemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -15 & 36 \\ 3 & & 3 & 3 & -36 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

Tenemos que $S(x) = (x^2+x-12)\cdot(x-3)$; llamamos $T(x) = x^2+x-12$

Para factorizar T(x) ya podríamos aplicar el método de factorización de polinomios de grado dos, pero también podemos volver a probar si 3 es raíz:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Tenemos que $T(x) = (x+4)\cdot(x-3)$

Como el factor $(x-3)$ ha aparecido tres veces, usaremos una potencia.

Solución: $x^4-5x^3-9x^2+81x-108 = (x+4)\cdot(x-3)^3$

