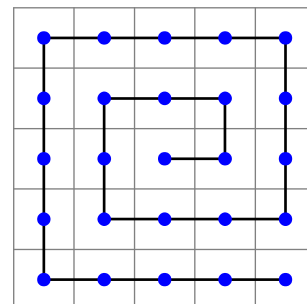


Cantidades de números naturales y de números enteros

En el nivel 1 vimos que había la misma cantidad de números enteros que de números naturales. El método para comprobarlo fue emparejarlos de manera que a cada número natural le correspondiera un único número entero y viceversa.

Cantidades de números naturales y de números racionales

Ahora vamos a ver algo que puede resultar aún más sorprendente: la cantidad de números racionales es la misma que la cantidad de números naturales. Lo conseguiremos «poniendo en fila» todos los números racionales, de modo que queden relacionados con los números naturales. La clave para hacerlo es la figura de la derecha, que muestra cómo podemos recorrer una cuadrícula de una manera ordenada a partir de una de las casillas: dibujando una espiral, pasaremos ordenadamente por todos los puntos de la cuadrícula.



Paso 1							Paso 2							Paso 3						
			3				$\frac{3}{-3}$	$\frac{3}{-2}$	$\frac{3}{-1}$	3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{-3}$	$\frac{3}{-2}$	$\frac{3}{-1}$	3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$
			2				$\frac{2}{-3}$	$\frac{2}{-2}$	$\frac{2}{-1}$	2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{-3}$	$\frac{2}{-2}$	$\frac{2}{-1}$	2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$
			1				$\frac{1}{-3}$	$\frac{1}{-2}$	$\frac{1}{-1}$	1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{-3}$	$\frac{1}{-2}$	$\frac{1}{-1}$	1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
-3	-2	-1	0	1	2	3	-3	-2	-1	0	1	2	3	-3	-2	-1	0	-1	2	3
			-1				$\frac{-1}{-3}$	$\frac{-1}{-2}$	$\frac{-1}{-1}$	-1	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{-3}$	$\frac{-1}{-2}$	$\frac{-1}{-1}$	-1	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$
			-2				$\frac{-2}{-3}$	$\frac{-2}{-2}$	$\frac{-2}{-1}$	-2	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-2}{-3}$	$\frac{-2}{-2}$	$\frac{-2}{-1}$	-2	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-2}{3}$
			-3				$\frac{-3}{-3}$	$\frac{-3}{-2}$	$\frac{-3}{-1}$	-3	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{-3}{-3}$	$\frac{-3}{-2}$	$\frac{-3}{-1}$	-3	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{3}$
							$\frac{-3}{-3}$	$\frac{-3}{-2}$	$\frac{-3}{-1}$	-3	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{-3}{-3}$	$\frac{-3}{-2}$	$\frac{-3}{-1}$	-3	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{3}$

Dibujamos una cuadrícula y anotamos los números enteros en un eje vertical y en uno horizontal de modo que coincidan los 0	Escribimos todas las fracciones usando como numerador el número del eje vertical y como denominador el del horizontal	Comenzando por el 0, iremos recorriendo en espiral todos los enteros y todas las fracciones
--	---	---

Hay que conseguir una correspondencia entre cada número natural (1, 2, 3, etc.) y cada número racional. Sabemos que en la cuadrícula están todos los números racionales, aunque todos aparecerán infinitas veces.

Comenzando por el 0 y siguiendo la espiral, iremos recorriendo todos los números racionales: si pasamos por uno que no esté aún en la lista, lo anotamos; si pasamos por uno que ya esté en la lista, lo saltamos.

Obtenemos esta correspondencia:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Q	0	1	-1	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$...

Esto demuestra que la cantidad de números racionales es la misma que la cantidad de números naturales.