

El teorema de Pick

Este teorema recibe el nombre en honor del matemático austriaco Georg Alexander Pick (1859–1942), que publicó el resultado en 1899. El teorema relaciona el área de un polígono con sus puntos con coordenadas enteras. Aunque su demostración no se puede hacer con los conocimientos de la educación secundaria, su uso es un buen ejercicio porque relaciona conocimientos de distintas partes de la matemática.

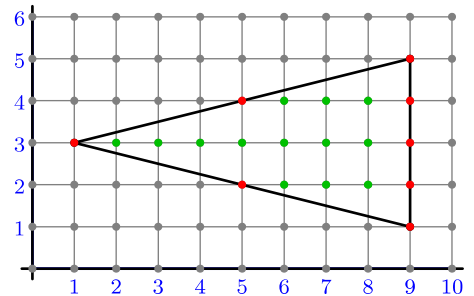
Un **polígono reticular** es el que puede ser representado en unos ejes de coordenadas de modo que todos sus vértices se sitúen en puntos con las dos coordenadas enteras.

Llamamos B al número de puntos con las dos coordenadas enteras de un polígono simple reticular situados en el perímetro del polígono e I al número de puntos con las dos coordenadas enteras situados en el interior. Entonces,

$$\text{Área} = B : 2 + I - 1$$

Ejemplo 1

Consideramos el triángulo que tiene los vértices en los puntos (1,3), (9,1) y (9,5). Es un polígono simple reticular y por tanto se le puede aplicar el teorema de Pick. El número de puntos con las dos coordenadas enteras que están situados en el perímetro (en rojo) es 8 (hay que contar los vértices) y el número de puntos con las dos coordenadas enteras que están situados en el interior (en verde) es 13.



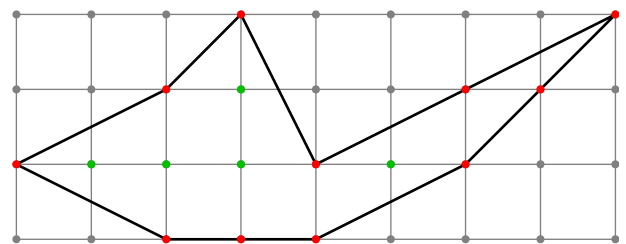
* Según el teorema de Pick, el área debe ser $8 : 2 + 13 - 1 = 4 + 12 = 16 \text{ u}^2$

* Como la base mide 4 y la altura 8, el área del triángulo es $4 \cdot 8 : 2 = 16 \text{ u}^2$

Efectivamente, se obtiene el mismo resultado con el método que ya conocíamos y aplicando el teorema de Pick.

Ejemplo 2

Es posible aplicar el teorema incluso aunque no se conozcan las coordenadas exactas, basta saber que son enteras. En el polígono de la derecha no sabemos cuáles son las coordenadas concretas y sin embargo el teorema se aplica perfectamente.



* Puntos en el perímetro: 11.

* Puntos en el interior: 5.

* Área = $11 : 2 + 5 - 1 = 5,5 + 4 = 9,5 \text{ u}^2$

Calcular el área con los métodos que hemos visto sería mucho más trabajoso.

Limitaciones de la aplicación del teorema

El teorema resulta muy atractivo porque se ve que en muchos casos permite calcular el área de un polígono con rapidez; pero en algunos polígonos puede ocurrir que se tarde más tiempo en averiguar cuántos puntos tienen coordenadas enteras que en aplicar otros métodos de cálculo de áreas. Ten en cuenta que veremos más métodos en niveles superiores.