

Fórmula del binomio de Newton

Si «a» y «b» son dos monomios cualesquiera y «n» es un número entero no negativo, se verifica:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Ejemplo 1

Vamos a desarrollar $(3x+2)^5$ usando esta fórmula.

$$(3x+2)^5 = \binom{5}{0} (3x)^5 + \binom{5}{1} (3x)^4 \cdot 2 + \binom{5}{2} (3x)^3 \cdot 2^2 + \binom{5}{3} (3x)^2 \cdot 2^3 + \binom{5}{4} 3x \cdot 2^4 + \binom{5}{5} 2^5$$

Podemos hacer todas las operaciones en la misma serie de igualdades, pero por ser el primer ejemplo, calculamos aparte los números combinatorios:

$$\binom{5}{0} = 1; \binom{5}{1} = 5; \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10; \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10; \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5; \binom{5}{5} = 1$$

$$\begin{aligned} (3x+2)^5 &= 1 \cdot (3x)^5 + 5 \cdot (3x)^4 \cdot 2 + 10 \cdot (3x)^3 \cdot 2^2 + 10 \cdot (3x)^2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 3x \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = \\ &= 243x^5 + 5 \cdot 81x^4 \cdot 2 + 10 \cdot 27x^3 \cdot 4 + 10 \cdot 9x^2 \cdot 8 + 5 \cdot 3x \cdot 16 + 32 = \\ &= \mathbf{243x^5 + 810x^4 + 1080x^3 + 720x^2 + 240x + 32} \end{aligned}$$

Monomio con signo negativo

Si alguno de los monomios originales tiene signo negativo, conviene considerarlo simplemente como es, formando parte del monomio, y en el desarrollo escribiéndolo entre paréntesis, haciendo los cálculos correspondientes de potencias con base negativa.

Ejemplo 2

Vamos a desarrollar $(x-3)^6$.

$$(x-3)^6 = \binom{6}{0} x^6 + \binom{6}{1} x^5 \cdot (-3) + \binom{6}{2} x^4 \cdot (-3)^2 + \binom{6}{3} x^3 \cdot (-3)^3 + \binom{6}{4} x^2 \cdot (-3)^4 + \binom{6}{5} x \cdot (-3)^5 + \binom{6}{6} (-3)^6$$

$$\text{Los números combinatorios: } \binom{6}{0} = 1; \binom{6}{1} = 6; \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15; \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15; \binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6; \binom{6}{6} = 1$$

$$\begin{aligned} (x-3)^6 &= 1 \cdot x^6 + 6 \cdot x^5 \cdot (-3) + 15 \cdot x^4 \cdot (-3)^2 + 20 \cdot x^3 \cdot (-3)^3 + 15 \cdot x^2 \cdot (-3)^4 + 6 \cdot x \cdot (-3)^5 + 1 \cdot (-3)^6 = \\ &= x^6 - 18x^5 + 15 \cdot x^4 \cdot 9 + 20 \cdot x^3 \cdot (-27) + 15 \cdot x^2 \cdot 81 + 6 \cdot x \cdot (-243) + 729 = \\ &= \mathbf{x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1458x + 729} \end{aligned}$$

Fórmula del binomio de Newton con sumatorio

Ya conoces las expresiones con el signo de sumatorio (Σ) desde la estadística del nivel 3. Ahora lo usaremos para expresar el desarrollo del binomio de Newton. Observa que este se compone de varios sumandos que tienen la misma estructura: un número combinatorio, una potencia de «a» y otra de «b». Usando una letra auxiliar que tome los valores de 0 a «n», podemos escribirlos todos con una sola expresión:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$