

Ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos

Resolvemos el problema calculando el centro de la circunferencia como el punto de corte de las mediatrices de dos de los tres segmentos definidos por los puntos y el radio de la circunferencia como la distancia entre el centro y uno cualquiera de los puntos. Observa que la circunferencia que obtenemos es la circunferencia circunscrita al triángulo definido por los tres puntos.

Ejemplo**Enunciado**

Averigua la ecuación de la circunferencia «C» que pasa por los puntos D, F y H.

Datos: D = (18,6), F = (-21,9), H = (14,-12).

Resolución

Llamamos «s» a la recta mediatriz del segmento DH.

El vector \overrightarrow{DH} es uno de los vectores normales a «s».

$$\overrightarrow{DH} = (14-18, -12-6) = (-4, -18) \Rightarrow \vec{n}_s = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DH} = -\frac{1}{2}(-4, -18) = (2, 9).$$

La recta «s» pasa por el punto medio del segmento DH, que llamamos M:

$$M = \left(\frac{18+14}{2}, \frac{6-12}{2} \right) = (16, -3)$$

$$\vec{n}_s = (2, 9) \Rightarrow s \equiv 2x + 9y + k = 0. M = (16, -3) \in s \Rightarrow 2 \cdot 16 + 9 \cdot (-3) + k = 0 \Rightarrow k = -5$$

Así pues, $s \equiv 2x + 9y - 5 = 0$

Llamamos «t» a la recta mediatriz del segmento FD.

El vector \overrightarrow{FD} es uno de los vectores normales a «t».

$$\overrightarrow{FD} = (18 - (-21), 6 - 9) = (39, -3) \Rightarrow \vec{n}_t = \frac{1}{3}\overrightarrow{FD} = \frac{1}{3}(39, -3) = (13, -1).$$

La recta «t» pasa por el punto medio del segmento FD, que llamamos N:

$$N = \left(\frac{-21+18}{2}, \frac{9+6}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{2} \right)$$

$$\vec{n}_t = (13, -1) \Rightarrow t \equiv 13x - y + k = 0. N \in t \Rightarrow 13 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) - \frac{15}{2} + k = 0 \Rightarrow k = 27$$

Así pues, $t \equiv 13x - y + 27 = 0$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de «s» y «t»:

$$\begin{cases} 2x + 9y = 5 \\ 13x - y = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Así, el centro de la circunferencia es } B = (-2, 1).$$

Llamamos «r» al radio de la circunferencia y lo calculamos como la distancia entre el centro y el punto D:

$$r = d(B, D) = \sqrt{(18 - (-2))^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{20^2 + 5^2} = \sqrt{425}$$

No es necesario calcular la raíz, puesto que hay que elevarla al cuadrado para poner el resultado en la ecuación de la circunferencia:

$$r^2 = \sqrt{425} = 425$$

Solución: $C \equiv (x+2)^2 + (y-1)^2 = 425$