

Producto escalar de dos vectores

- * El producto escalar de dos vectores es un número real.
- * Existe otro producto de dos vectores llamado producto vectorial, que estudiaremos en el nivel 6 de este curso; por eso, siempre hay que decir «producto escalar» y no basta decir «producto».
- * El producto escalar de los vectores \vec{u} y \vec{v} se escribe $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Como la notación del punto permite eliminarlo cuando no hay duda, se suele escribir simplemente $\vec{u} \vec{v}$.
- * El producto escalar se define como la suma de los productos de las componentes de los vectores. Es decir, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son dos vectores del plano, su producto escalar se calcula así:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (u_1, u_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Ejemplos

- ① El producto escalar de los vectores $\vec{a} = (2, 3)$ y $\vec{c} = (5, 7)$ es
 $\vec{a} \vec{c} = (2, 3)(5, 7) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 10 + 21 = 31$
- ② El producto escalar de los vectores $\vec{e} = (1, -4)$ y $\vec{m} = (-6, 2)$ es
 $\vec{e} \vec{m} = (1, -4)(-6, 2) = 1(-6) - 4 \cdot 2 = -6 - 8 = -14$
- ③ El producto escalar de los vectores $\vec{n} = (4, -6)$ y $\vec{r} = (3, 2)$ es
 $\vec{n} \vec{r} = (4, -6)(3, 2) = 4 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 12 - 12 = 0$
- ④ El producto escalar de los vectores $\vec{s} = (0, 7)$ y $\vec{u} = (15, 0)$ es
 $\vec{s} \vec{u} = (0, 7)(15, 0) = 0 \cdot 7 + 15 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$

Utilidad del producto escalar

A pesar de su aparente sencillez, el producto escalar tiene importantes propiedades que iremos estudiando en este curso.

- * En este nivel 4 vamos a utilizar el producto escalar para detectar si dos vectores son perpendiculares o no y también para obtener con rapidez las componentes de un vector perpendicular a uno dado.
- * En el nivel 5 utilizaremos el producto escalar para calcular el ángulo que forman dos vectores.

Propiedad

Si \vec{v} es un vector del plano, se verifica $\vec{v} \vec{v} = |\vec{v}|^2$

Demostración

Suponemos que $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Entonces:

$$\vec{v} \vec{v} = (v_1, v_2)(v_1, v_2) = v_1 v_1 + v_2 v_2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$|\vec{v}|^2 = \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \right)^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Vemos que las dos expresiones tienen el mismo valor.