

Resolución de problemas usando suma de punto y vector

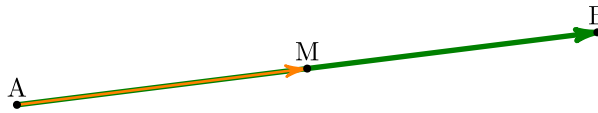
La operación de suma de punto y vector resulta ser de gran utilidad para resolver de una manera bastante sencilla muchos problemas de geometría. La idea clave es que para averiguar un punto desconocido podemos sumar un punto conocido y un vector que sabemos calcular a partir de otras propiedades. Suele ser necesario recordar o deducir propiedades que relacionen unos vectores con otros. Vamos a ver un ejemplo de esta técnica que, además, nos proporcionará una fórmula útil.

Punto medio de un segmento

Conocemos las coordenadas de los extremos de un segmento y queremos calcular las coordenadas de su punto medio.

Ponemos nombres: los extremos son $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$; el punto medio del segmento AB es $M = (m_1, m_2)$.

Observamos dos relaciones que nos permitirán calcular M :



- * $M = A + \overrightarrow{AM}$, por definición de vector que une dos puntos.
- * $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, ya que los vectores \overrightarrow{AM} y \overrightarrow{AB} tienen estas relaciones:
 - El módulo de \overrightarrow{AM} es la mitad del módulo de \overrightarrow{AB} porque M es el punto medio del segmento AB .
 - Tienen la misma dirección y el mismo sentido.

Por tanto, $M = A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. Hacemos las operaciones:

$$\begin{aligned} M &= A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = (a_1, a_2) + \frac{1}{2} (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (a_1, a_2) + \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2} \right) = \\ &= \left(a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, a_2 + \frac{b_2 - a_2}{2} \right) = \left(\frac{2a_1 + b_1 - a_1}{2}, \frac{2a_2 + b_2 - a_2}{2} \right) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right). \end{aligned}$$

Llegamos a esta fórmula final:

$$\left. \begin{array}{l} A = (a_1, a_2) \\ B = (b_1, b_2) \end{array} \right\} \Rightarrow M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$

Observación: hubiéramos llegado a la misma fórmula usando $M = B + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$

Ejemplo

Enunciado: calcula las coordenadas del punto M , que es el punto medio del segmento de extremos los puntos $(2, -8)$ y $(4, 0)$.

Resolución

$$M = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{-8+0}{2} \right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{-8}{2} \right) = (3, -4). \text{ Solución: } M = (3, -4).$$